2020 / 11 / 4 — المحاضرة السادسة

21

مثال:

$A = Z$ ولنزودها بالعلاقة الثنائية R معرفة كما يلي

$aRb \Leftrightarrow \exists t \in Z : b - a = 2t$

أثبت أن R علاقة تكافؤ وأوجد صف تكافؤ عنصر كيفي.

الحل:

① R انعكاسية لأن

$\exists t=0 \in Z \quad a - a = 2(0)$

ومنه aRa مهما يكن $a \in Z$

② R تناظرية لأنه

$aRb \Rightarrow \exists t \in Z : b - a = 2t \quad \star$

نضرب $\star$ بـ (-1) نجد

$a - b = 2(\underbrace{-t}_{\in Z})$ ومنه bRa

③ R متعدية لأن:

$aRb \wedge bRc \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists t_1, t_2 \in Z : b - a = 2t_1$

$c - b = 2t_2$

ومنه بجمع العلاقتين نحصل على

$c - a = 2(\underbrace{t_1 + t_2}_{\in Z})$

إذا aRc

اذاً العلاقة R علاقة تكافؤ

22

لنوجد صف تكافؤ $a \in Z$

$[a] = \{x \in Z : aRx\}$

$= \{x \in Z : x - a = 2t : t \in Z\}$

$= \{x \in Z : x = a + 2t : t \in Z\}$

$[a] = \{x \in Z : x \equiv a \pmod 2\}$

$[0] = \{x \in Z : x \equiv 0 \bmod 2\}$

$= \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$

$[1] = \{\dots, -3, -1, 1, 3, 5\}$

مثال:

{ التمرين السابق بالحالة العامة }

23

ليكن $n \in N^* \setminus \{1\}$ و $A = Z$ ولنعرف العلاقة R بالشكل

$aRb \Leftrightarrow \exists t \in Z : a - b = nt$

أثبت أن R علاقة تكافؤ (وظيفة) و كذلك

$[a] = \{x \in Z : x = a + nt : t \in Z\}$

$= \{x \in Z : x \equiv a \pmod n\}$

هنالك n صف تكافؤ مختلفة وهي

$[0], [1], \dots, [n-1]$

يرمز في هذه الحالة لـ $[a]$ (صف تكافؤ العنصر a)

بالرمز $\bar{a}$ ويرمز لمجموعة صفوف التكافؤ $\frac{Z}{nZ}$ أي

$\frac{Z}{nZ} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$

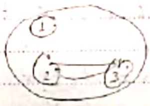
مثال: لنأخذ $A = Z \times N^*$

أثبت أن R المعرفة بالشكل

$(p, q) R (p', q') \Longleftrightarrow pq' = qp'$

تشكل علاقة تكافؤ. لنوجد صف تكافؤ عنصر كيفي

$[(p, q)] = \{(p', q') \in A : pq' = qp'\}$



صف تكافؤ 2 و 3

صف تكافؤ 1

صف تكافؤ 3 و 2

24

مثال:

$A = Z$ ولنزود A بعلاقة ثنائية R المعرفة بالشكل

$aRb \Leftrightarrow a \leq b$

إن R علاقة ترتيب (انعكاسية، متعدية، تخالفية)

كذلك R هي علاقة ترتيب كلي لأنه مهما يكن $a, b \in Z$ فإن: إما $a \leq b$ أو $b \leq a$

مثال: $A = Z$ ولنفرض العلاقة R كما يلي:

$aRb \Leftrightarrow \exists t \in N : b = t \cdot a$

إن R علاقة ترتيب

1- R انعكاسية

$\exists t = 1 \in N : a = (1)(a)$ ومنه aRa مهما يكن $a \in Z$

2- R متعدية:

$aRb \wedge bRc \Rightarrow$

$\exists t_1, t_2 \in N : b = t_1 a \wedge c = t_2 b$

بالتعويض

$c = t_2 b = \underbrace{t_2 t_1}_{\in N} a$ وبالتالي aRc

Farah

/ /

25

3 - R تخالفية

$a R b \wedge b R a \Rightarrow \exists t_1, t_2 \in N : b = a t_1 \ , \ a = t_2 b$

ومنه $a = t_2 b = t_2 t_1 a \Rightarrow t_1 . t_2$

ومنه $\boxed{t_1 = t_2 = 1}$ أي أن $\boxed{a = b}$

إن R علاقة ترتيب جزئي لأن

$5 \not R 2$ و $2 \not R 5 \Rightarrow$ يوجد عناصر لا [illegible] للترتيب

المحاضرة السابعة:

" قوانين التشكيل "

تعريف:

لتكن A مجموعة ما نقول عن ⋆ أنه قانون تشكيل داخلي على A إذا تحقق

$$u, v \in A \Leftrightarrow u \star v \in A$$

تعريف:

لتكن A مجموعة ما ولتكن F حقل ما عندها نقول عن (.) أنه قانون تشكيل خارجي مجموعة مؤثرات F إذا تحقق:

$$\lambda \in F \ , \ v \in A \Longrightarrow \lambda . v \in A$$